Känguru 2024 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180°. Das Verhältnis 1 : 3 : 5 teilt die Winkel in insgesamt $1 + 3 + 5 = 9$ Anteile auf, also macht jeder Anteil $180°/9 = 20°$ aus. Der größte Winkel hat daher $5 \cdot 20° =$ **100°**.

2. Alle Teile müssen um genau 180° gedreht werden, damit sie überhaupt in das Loch hineinpassen. Nach dieser Drehung darf keine Linie durch die Seite links oben führen. Vor der Drehung war das die Seite rechts unten. Nur bei **(C)** geht durch diese Seite keine Linie.

3. Alle Zahlen, die um zwei kleiner sind als ein Vielfaches von zehn, enden auf 8. Von den vorgeschlagenen Zahlen sind das 78, 58, 38 und 18.

   Als nächstes überprüfen wir, welche doppelt so groß sind wie eine Quadratzahl. Dazu ziehen wir von jeder Zahl 2 ab und ziehen dann die Wurzel:

   - $\sqrt{78-2} = \sqrt{76} \approx 8{,}7 \notin \mathbb{Z}$,
   - $\sqrt{58-2} = \sqrt{56} \approx 7{,}5 \notin \mathbb{Z}$,
   - $\sqrt{38-2} = \sqrt{36} = 6$,
   - $\sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4$,
   - $\sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$.

   Zuletzt wollen wir wissen, welche das Doppelte einer Primzahl sind. Dazu halbieren wir alle und überprüfen dann, ob wir eine Primzahl haben.

   - $78/2 = \sqrt{39} = 3 \cdot 13$,
   - $58/2 = \sqrt{29}$ prim,
   - $38/2 = \sqrt{19}$ prim,
   - $18/2 = \sqrt{9} = 3 \cdot 3$,
   - $6/2 = \sqrt{3}$ prim.

   Nur **38** erfüllt alle drei Bedingungen gleichzeitig.

4. Die Winkel an den Spitzen aller sechs Stücke zusammen betragen 360°, daher hat jedes Stück dort einen Winkel von 60°. Der Winkel eines solchen Stückes wurde nun auf fünf gleich große Winkel aufgeteilt, die daher jeweils $60°/5 =$ **12°** betragen.

5. Wir wissen, dass der Graph eine Gerade ist, daher genügt es, zwei beliebige Punkte darauf zu finden, um die Gerade zeichnen zu können (indem wir diese Punkte mit einem Lineal verbinden).

   Am leichtesten zu zeichnen sind Punkte, die auf den Achsen liegen. Für $x = 0$ erhalten wir $y = 1$ und für $y = 0$ erhalten wir $x = -1$. Wenn wir die beiden Punkte $(0, 1)$ und $(-1, 0)$ in Julias wundersamem Koordinatensystem einzeichnen und verbinden, so erhalten wir den Graph **(D)**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wir beginnen mit unserem gewohnten Koordinatensystem und zeichnen die Gerade dort ein. Das Umkehren der x-Orientierung entspricht einer horizontalen Spiegelung an der y-Achse, und das Umkehren der y-Orientierung einer vertikalen Spiegelung an der x-Achse, wobei man diese Spiegelungen in beliebiger Reihenfolge nacheinander ausführen kann. Wir können uns daher diese beiden Spiegelungen der Reihe nach vorstellen und erhalten Graph **(D)**.

   Oder aber wir können uns daran erinnern, dass die Kombination einer horizontalen und einer vertikalen Spiegelung genau einer Rotation um 180° um den Schnittpunkt der Spiegelungsachsen (hier also den Koordinatenursprung) entspricht; auch damit erhalten wir Graph **(D)**.

6. Die Wahrscheinlichkeit w für 1 und 6 zusammen beträgt $w = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Diese wird nun im Verhältnis 1 : 2 aufgeteilt. Daher erhält die Seite mit dem Sechser 2/3 von w, also eine Wahrscheinlichkeit von

   $$w \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

   (während 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/9 gewürfelt wird, also nur halb so wahrscheinlich ist).

7. Wir benötigen die Beobachtung $16 = 4^2$ und die Rechenregeln $(a^b)^c = a^{(b\cdot c)}$ und $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$:

$$16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} = 4 \cdot 16^{15} = 4 \cdot (4^2)^{15} = 4^1 \cdot 4^{30} = \mathbf{4^{31}}.$$

8. Nach dem ersten Zug zeigen 4 Münzen mit dem Kopf nach unten. Im zweiten Zug haben wir mehrere Möglichkeiten, wieviele dieser Münzen wir wieder umdrehen und wie viele wir zum ersten Mal umdrehen:

   - 4 Münzen zum zweiten Mal gewählt. $\Longrightarrow$ Es zeigen wieder alle mit dem Kopf nach oben.
   - 3 Münzen zum zweiten Mal gewählt und 1 zum ersten Mal. $\Longrightarrow$ Es zeigen nun genau zwei mit dem Kopf nach unten (die nicht wieder zurückumgedrehte aus dem ersten Zug, und die im zweiten Zug erstmals umgedrehte).
   - 2 Münzen zum zweiten Mal gewählt und 2 zum ersten Mal. $\Longrightarrow$ Es zeigen nun genau vier mit dem Kopf nach unten (zwei nicht wieder zurückumgedrehte aus dem ersten Zug, und zwei im zweiten Zug erstmals umgedrehte).
   - Nur eine oder gar keine Münze zurückumzudrehen ist nicht möglich, weil wir vier Münzen umdrehen müssen und nur zwei noch nicht berührte Münzen zur Verfügung haben.

   Auch im zweiten Zug ist es also noch nicht möglich, den gewünschten Zustand zu erreichen.

   Haben wir jedoch im zweiten Zug 3 Münzen zurückumgedreht, dann zeigen nun genau zwei nach unten und entsprechend die verbliebenen vier nach oben. Indem wir diese vier auswählen, schaffen wir es im **3.** Zug.

9. Wir beobachten, dass $6 = 2 \cdot 3$ und $10 = 2 \cdot 5$. Mit jeder Multiplikation kommt zum Produkt also genau ein Faktor 2 dazu, und entweder ein Faktor 3 oder ein Faktor 5. Die Anzahl der Zweier ist daher immer gleich der Summe der Anzahl der Dreier und der Fünfer. Das ist nur bei vier der fünf Optionen erfüllt:

   (A) $100 = 20+80$, **(B)** $90 \neq 30+80$, (C) $90 = 20+70$, (D) $110 = 80+30$, (E) $50 = 0+50$.

10. Wir betrachten die Fläche, die links von allen Wegen liegt (oben und unten also vom schwarzen Weg begrenzt ist und dazwischen von strichlierten), und versuchen, deren Größe zu bestimmen.

    Wenn man bei der Berechnung vom schwarzen Weg ausgeht, sieht man, dass diese Fläche gleich der Hälfte des Parks abzüglich der Fläche B ist.

    Geht man hingegen vom strichlierten Weg aus, so ist sie gleich der halben Fläche des Parks abzüglich der Flächen A und C.

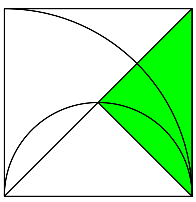
    Da man in beiden Fällen dieselbe Fläche erhält und in beiden Fällen von der halben Parkfläche beginnt, müssen die beiden Abzüge gleich groß sein, also $B = A + C$.

11. Jede der sechs Seiten des großen Würfels besteht aus 9 Seiten von kleinen Würfeln. Davon sollen genau die Hälfte, also $6 \cdot 9/2 = 3 \cdot 9 = 27$, schwarz sein.

    Je nachdem, wo er einen schwarzen Würfel einbaut, sind davon drei (Ecke), zwei (Kante), eine (Mittelfläche) oder gar keine (Mittelpunkt des Würfels) Seiten sichtbar. Möglichst effizient ist es, sie so einzubauen, dass von jedem schwarzen Würfel möglichst viele Seiten sichtbar sind.

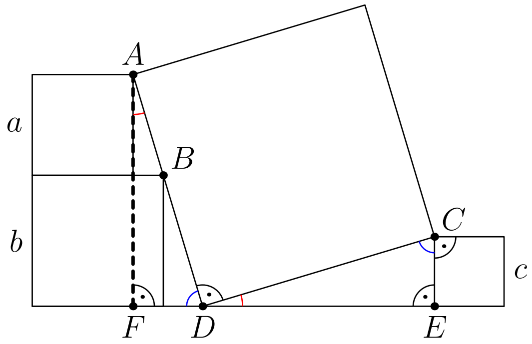
    Er hat maximal 8 Ecken zur Verfügung, damit sind bereits $8 \cdot 3 = 24$ schwarze Seiten sichtbar. Die noch fehlenden drei Seiten kann er mit einem schwarzen Würfel an einer Kante und einem als Mittelfläche einer Seite erfüllen. Insgesamt braucht er daher mindestens **10** schwarze Würfel (eine andere Zahl).

12. Wir zeichnen noch eine weitere Strecke vom Mittelpunkt zum rechten unteren Eck ein und verschieben einige der gefärbten Bereiche geschickt:

    Damit ist klar, dass der Flächeninhalt genau ein Viertel des Quadrats ausmacht, also $6 \cdot 6/4 = \mathbf{9}$.

13. Sei D der Punkt des großen Quadrats, der auf der Geraden aufliegt, und sei E der linke untere Eckpunkt des rechten kleinen Quadrats. Wir zeichnen das Lot von A auf die Gerade ein und nennen den Lotfußpunkt F:



Wegen den rechten Winkeln in den Quadraten und Lotfußpunkten sind die Dreiecke AFD und DEC kongruent. (Die roten und blauen Winkel ergänzen sich jeweils auf 90°, einerseits in D entlang der Geraden, und andererseits wegen der Winkelsumme in den rechtwinkeligen Dreiecken.)

Damit ist $FD = c$ und $AF = a + b$. Für die gesuchte Seite s ergibt sich im rechtwinkeligen Dreieck AFD aus dem Satz von Pythagoras:

$$\mathbf{s = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}}.$$

14. Alle Ausdrücke stellen gewichtete arithmetische Mittel dar.

In $\frac{x+y}{2}$ haben beide Zahlen genau gleich viel Einfluss auf den Mittelwert.

Den Ausdruck $\frac{x+2y}{3}$ können wir uns so vorstellen, dass von einer Zahl x und zwei Zahlen y der Mittelwert gebildet wird; y hat also einen doppelt so hohen Einfluss (Gewicht) auf das Mittel wie x. In $\frac{2x+y}{3}$ ist es genau umgekehrt.

Im Ausdruck $\frac{x+3y}{4}$ hat y sogar einen dreimal so hohen Einfluss. Wir können es uns wieder vorstellen, als ob wir eine Zahl x und drei Zahlen y mitteln. In $\frac{3x+y}{4}$ ist es wieder genau umgekehrt, dass x einen dreimal so hohen Einfluss hat wie y.

Da y größer ist, ist jener Ausdruck am größten, in dem y den höchsten Einfluss hat, das ist $\frac{x+3y}{4}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

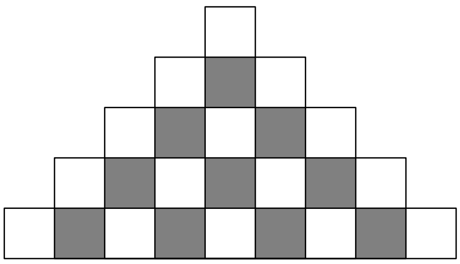
Wir können auch alle Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner 12 bringen:

$$\frac{3x+9y}{12}, \qquad \frac{4x+8y}{12}, \qquad \frac{6x+6y}{12}, \qquad \frac{8x+4y}{12}, \qquad \frac{9x+3y}{12}.$$

(Dies sind dieselben Werte, nur anders dargestellt.)

Der Nenner ist überall gleich, und unter den Zählern ist nun leicht zu sehen, dass alle genau 12 Zahlen addieren, aufgeteilt auf einige x und einige y. Daher ist jener Zähler am größten, der die meisten y verwendet.

15. Wir färben alles im Schachbrettmuster:



Jeder Domino-Stein überdeckt genau ein schwarzes und ein weißes Feld, daher können wir nicht mehr Dominos unterbringen als die verfügbaren 10 schwarzen Felder.

Umgekehrt ist es leicht, eine Anordnung zu finden, die tatsächlich 10 Steine unterbringt, etwa indem man auf jedes schwarze Feld einen Stein legt, der dieses Feld und das Feld links daneben abdeckt.

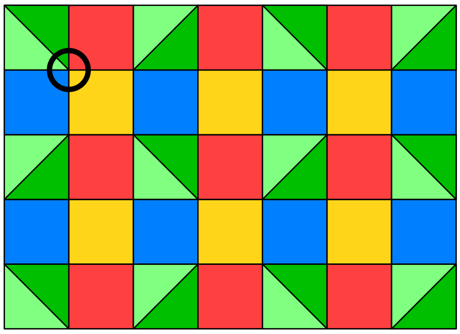
Man bringt also höchstens **10** Domino-Steine unter.

16. Es gibt insgesamt 900 dreiziffrige Zahlen (von 100 bis 999). Leichter ist es, jene zu zählen, die 1, 2 und 3 *nicht* enthalten: An der ersten Stelle dürfen diese keine 0 haben, also sind noch 6 Ziffern möglich (4, 5, 6, 7, 8, 9). An der zweiten und dritten Stelle sind jeweils 7 Ziffern (alle außer 1, 2 und 3) möglich. Alle solche Kombinationen sind gültig.

    Es gibt daher $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ dreiziffrige Zahlen, die keine Ziffer 1, 2 oder 3 enthalten, und entsprechend $900 - 294 =$ **606** gesuchte Zahlen.

17. Die Primzahlzerlegung von 2023 ist $2023 = 2^3 \times 11 \times 23 = 11 \times 2 \times 2 \times 2 \times 23$. Man benötigt also **4** Multiplikationszeichen.

18. Wenn wir die Enden der Diagonalen betrachten (siehe mit Kreis markierte Stelle), sehen wir, dass dort fünf Felder zusammenstoßen, also benötigen wir mindestens fünf Farben. Eine Färbung mit **fünf** Farben ist aber auch tatsächlich möglich, beispielsweise indem man eine klassische vierfärbige Schachbrettfärbung nimmt, und die diagonalen Felder noch in hellgrün und dunkelgrün aufteilt:



19. Wenn eine Zahl n durch 6 teilbar ist (B), dann ist sie auch durch 3 teilbar (A). Daher kann (B) nicht als einzige Aussage wahr sein, und ist somit falsch.

    Wenn n durch 3 teilbar ist (A), gibt es zwei Fälle: Entweder die Zahl ist gerade, dann ist sie auch durch 6 teilbar (B), oder sie ist ungerade (C). Es wäre also mindestens eine weitere Aussage wahr. Somit kann (A) nicht wahr sein.

    Wenn n eine Primzahl ist (E), dann ist sie entweder ungerade (C) oder gleich 2 (D). Auch (E) kann daher nicht wahr sein, weil sonst mindestens eine weitere Aussage wahr wäre.

    Umgekehrt kann $n = 2$ (D) nicht wahr sein, weil die Zahl dann eine Primzahl wäre und (E) wahr.

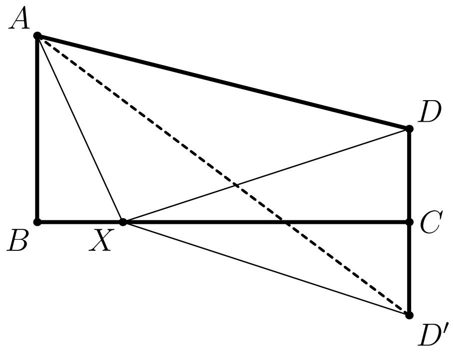
    Somit bleibt nur **(C), n ist ungerade,** übrig. Zum Beispiel für $n = 25$ sind wie gewünscht alle anderen Aussagen falsch.

20. Wir nehmen an, die Kerzen haben jeweils eine Länge von 1. Nach einer Zeit t (in Stunden) hat die schneller abbrennende Kerze noch eine Länge von $1 - t/4$ und die langsamere von $1 - t/5$. Wir suchen also jenes t, für das
$$3 \cdot \left(1 - \frac{t}{4}\right) = 1 - \frac{t}{5}$$
gilt. Wenn wir alles mit 20 multiplizieren, um die Nenner loszuwerden, bleibt $60 - 15t = 20 - 4t$, somit $40 = 11t$ und damit eine Zeit von $t = \mathbf{\frac{40}{11}}$ Stunden.

21. Wenn man in einem Dreieck zwei Seitenmittelpunkte verbindet, ist diese Verbindung nach Strahlensatz parallel zur dritten Seite und genau halb so lang wie diese. Wir müssen also nur für die sechs Teilstrecken des Streckenzugs jeweils 1) das Dreieck finden, in dem sie liegt, 2) die dazu parallele Seite dieses Dreiecks betrachten, 3) die Längen dieser Dreiecksseiten addieren und am Ende die Gesamtsumme halbieren.

    MN ist parallel zu BC, NP zu AD, PQ zu AC, QR zu AB, RS zu CD, und SM zu AC. Addiert man diese parallelen Strecken, erhält man $BC + AD + AC + AB + CD + AC = 10 + 5 + 6 + 7 + 8 + 6 = 42$. Halbiert man das noch, so erhält man eine Länge des Streckenzugs von **21**.

22. Wir spiegeln D an BC und erhalten D':



Die Länge XD ist dabei wegen der Symmetrie gleich der Länge XD'. Wir suchen also jenen Punkt X, für den $AX + XD'$ minimal ist.

Nun ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten aber einfach eine gerade Strecke, und die Summe kann nie kürzer werden, als wenn X genau auf dieser direkten Verbindung liegt.

Die Länge dieser direkten Verbindung ist nach Satz von Pythagoras gleich $\sqrt{BC^2 + (AB + CD)^2} = \sqrt{8^2 + (2+4)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Mit etwas Erfahrung erkennt man in $\sqrt{6^2 + 8^2}$ das Doppelte des pythagoräischen Tripels $3^2 + 4^2 = 5^2$, und erspart sich damit das Ausrechnen.

Es ist auch möglich, die Entfernung BX mit einer Unbekannten x zu bezeichnen. Dann haben wir $AX = \sqrt{4^2 + x^2}$ und $XD = \sqrt{(8-x)^2 + 2^2}$. Mit etwas Geschick und Geduld kann man deren Summe ableiten und Null setzen.

23. Bei jeder Karte ist klar: Falls sie in eine Box mit einem Plus davor (inklusive der ersten, die das Zeichen nicht explizit stehen hat) kommt, werden wir die kleinere Zahl wählen, und falls sie in eine Box mit einem Minus kommt, dann die größere. Wir beginnen damit, alle Karten auf die Seite mit der kleineren Zahl zu drehen, und haben nun $5 + 3 + 0 + 7 + 4 + 9 = 28$.

Die Fragestellung ist nun äquivalent dazu, drei dieser Karten auszuwählen, auf die andere Seite zu drehen und gleichzeitig das Vorzeichen zu ändern. Wir wählen dafür also jene drei Karten, die die Summe am meisten verringern. Wenn wir beispielsweise die Karte $(5, 12)$ wählen, dann addieren wir um 5 weniger zur Summe, und subtrahieren stattdessen um 12 mehr. Das Umdrehen einer Karte verändert die Summe also genau um die Summe ihrer Vorder- und Rückseite.

Die drei Karten, für die die Summe der beiden Zahlen am größten ist, sind die Karte $(9, 10)$ (Summe 19), die Karte $(4, 14)$ (Summe 18) und die Karte $(5, 12)$ (Summe 17). Die Gesamtsumme verringert sich dadurch auf $28 - 19 - 18 - 17 = \mathbf{-26}$.

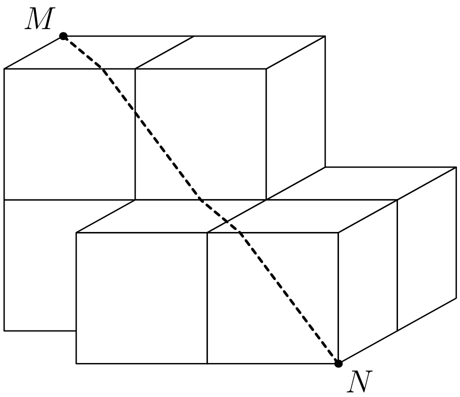
24. Der Durchschnitt $\overline{pq{,}rs}$ ist kaum größer als $\overline{pq}$ (nämlich um weniger als 1 größer, da sich der ganzzahlige Anteil nicht geändert hat). Einerseits muss $\overline{rs}$ größer oder gleich $\overline{pq}$ sein, da der Durchschnitt sonst kleiner als $\overline{pq}$ wäre. Da $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ ganze Zahlen sind, wäre andererseits bei einer Differenz von 2 oder mehr der Mittelwert bereits um mindestens 1 größer.

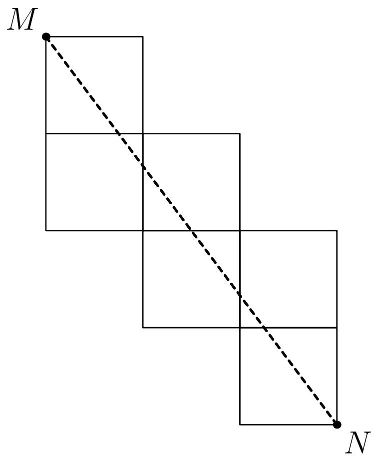
Also sind $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ entweder gleich, oder $\overline{pq}$ ist um genau 1 größer.

Im ersten Fall wäre der Mittelwert gleich den beiden Zahlen, dann hat er keine Ziffern hinter dem Komma, also wäre $\overline{rs} = 0$ und damit auch $\overline{pq} = 0$. Damit ist die Zahl $\overline{pqrs}$ aber gleich 0 und nicht vierziffrig.

Also muss $\overline{rs}$ um genau 1 größer sein. Der Mittelwert hat als gebrochenen Anteil dann 0,5, also $\overline{rs} = 50$ und $\overline{pq} = 49$. Die Zahl $N = 4950$ erfüllt die Bedingung und hat die Ziffernsumme **18**.

25. Die kürzeste Strecke, entlang der eine Ameise auf der Oberfläche des Objekts von M nach N krabbeln kann, verlauft wie folgt:





Wir klappen jenen Teil der Oberfläche, den die Ameise überquert, zu einem flachen Netz aus. Da sich die Ameise dabei insgesamt 3 Würfel weit nach links und 4 Würfel weit nach oben oder hinten bewegt, ergibt sich nach Pythagoras eine Weglänge von $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Würfelseiten, also (wegen der Kantenlänge von 2) eine Wegstrecke von **10**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Es bleibt zu zeigen, dass es wirklich nicht kürzer geht (wobei 10 die kleinste Antwortmöglichkeit ist, wir uns im Rahmen eines Känguru-Wettbewerbs darüber also nicht allzu sehr den Kopf zu zerbrechen brauchen). An Hand des Objekts zu argumentieren, dass beispielsweise zuerst weit nach links und dann gerade nach oben zu laufen nicht schneller ist, ist gar nicht so leicht.

Wie auch immer ein kürzerer Weg ausschauen würde, wir könnten danach aber das Netz jener Würfelflächen aufklappen, die wir besucht haben. Da wir in Summe 3 Würfel nach links, 2 nach oben und 2 nach hinten müssen, muss so ein Netz in Summe über Höhe und Breite mindestens 7 Würfelseitenlängen überspannen. Es könnte, so wie unser Netz, 3×4 sein, aber eventuell auch 2×5 (so ein Netz erhält man beispielsweise, wenn man von N zuerst ganz nach hinten läuft und dann zu M) oder 1×6. Aber $\sqrt{2^2 + 5^2}$ und $\sqrt{1^2 + 6^2}$ sind beide länger.

26. Bei n Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Zwölfer zu würfeln, gleich $\left(\frac{11}{12}\right)^n$. (Alle Würfel müssen eine der anderen 11 Zahlen würfeln, wofür die Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{11}{12}$ ist.)

Die Wahrscheinlichkeit, genau einen Zwölfer zu würfeln, ist $n \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$. (Es gibt n Möglichkeiten, welcher Würfel den einen Zwölfer würfelt, und die Wahrscheinlichkeit, dass die Würfel so fallen, ist jeweils $\frac{1}{12}$ für diesen einen Würfel und $\frac{11}{12}$ für alle anderen.)

Wenn wir diese beiden Wahrscheinlichkeiten gleichsetzen, erhalten wir

$$\left(\frac{11}{12}\right)^n = n \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{n-1},$$

wovon der Faktor $\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$ sofort gekürzt werden kann. Es bleibt $\frac{11}{12} = n \cdot \frac{1}{12}$, und damit $n = \mathbf{11}$.

27. Es gilt $6^z = (2 \cdot 3)^z = 2^z \cdot 3^z$. Mittels der ersten beiden Gleichungen $2^x = 3$ und $2^y = 7$ können wir 3 und 7 überall durch Zweierpotenzen ersetzen. Somit wird $6^z = 7$ zu $2^z \cdot (2^x)^z = 2^y$, und nach Anwendung der schon in Aufgabe 7 benutzten Rechenregeln zu $2^{z+x \cdot z} = 2^y$.

Da beide Seiten dieselbe Basis 2 haben, müssen auch die Hochzahlen die Gleichheit $z + x \cdot z = y$ erfüllen, die nach z aufgelöst $z = \frac{y}{1+x}$ ergibt.

28. Der Graph der Funktion ist symmetrisch um die Achse $x = 21$: Für $x = 0$ sehen wir, dass $f(22) = f(20)$ gilt, für $x = 1$ erhalten wir $f(23) = f(19)$, für $x = 2$ folgt $f(24) = f(18)$, und so weiter. Das können wir auch generell beweisen: $f(21 + a) = f(22 + (a - 1)) = f(20 - (a - 1)) = f(21 - a)$.

Wo auch immer eine Nullstelle ist, gespiegelt an $x = 21$ ist die andere. Der Mittelpunkt der beiden Nullstellen liegt daher genau bei 21, und ihre Summe bei **42** (eine andere Zahl).

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Weil die Angabe uns bereits garantiert, dass die Antwort eindeutig ist, können wir auch einfach eine willkürliche Nullstelle festlegen und schauen, was passiert. Wenn wir zum Beispiel sagen, $f(2023) = 0$, folgt $f(2023) = f(22 + 2001) = f(20 - 2001) = f(-1991)$, also liegt die zweite Nullstelle bei -1991. Addiert man die beiden, erhält man $2023 - 1991 = 42$. Das funktioniert natürlich mit jeder willkürlich gewählten Zahl, nicht nur mit 2023.

Entsprechend kann man es auch verallgemeinern und damit wieder allgemein beweisen: Wenn a eine Nullstelle ist, ist $0 = f(a) = f(22+(a-22)) = f(20-(a-22)) = f(42-a)$, also liegt die zweite Nullstelle bei $42 - a$, und die Summe der beiden bei 42.

29. Dass die Zahl vierziffrig sein soll, schränkt wegen der Größenordnung die Möglichkeiten schon stark ein. Sobald eine der Ziffern 6 oder größer ist, ist die Summe $a^a + b^b + c^c + d^d$ mindestens fünfstellig.

    Wären alle Ziffern 4 oder kleiner, unterscheiden wir zwei Unterfälle: Wenn alle Ziffern gleich 4 sind, ist $4 \cdot 4^4 = 1024$; dann sind aber nicht alle Ziffern gleich 4. Sobald dagegen eine Ziffer kleiner als 4 ist, ist die Zahl höchstens dreistellig.

    Es kann also keine Ziffer 6 oder größer geben, und es muss mindestens eine Ziffer größer als 4 geben, also kommt 5 unter den Ziffern vor. Es gilt $5^5 = 3125$. Gäbe es eine zweite (oder gar dritte) Ziffer 5, so wäre die Tausenderziffer mindestens 6, aber wir wissen ja bereits, dass es keine Ziffer größer als 5 geben darf. Daher gibt es nur genau eine Ziffer 5.

    Selbst, wenn die anderen drei Ziffern alle so groß wie möglich wären – also maximal 4 –, ergäbe sich höchstens eine Summe von $5^5 + 3 \cdot 4^4 = 3893$.

    Damit ist die Tausenderziffer ganz sicher **3**.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Natürlich interessiert uns, wie die Zahl denn nun genau lautet, selbst, wenn wir die eigentliche Aufgabe nun schon gelöst haben. Wir wissen bereits, dass die Tausenderziffer 3 ist und eine Ziffer 5 vorkommt. Für die restlichen 2 Ziffern, die alle höchstens 4 sein können, gibt es nun nicht mehr viele Möglichkeiten. Tatsächlich stellt sich $\overline{abcd} = 3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$ als einzige Lösung heraus.

30. Wir bezeichnen die unbekannten Höhen der Münzstapel und die Anzahlen, welches Feld wie oft als linkestes der vier Quadrate gewählt wurde, wie folgt:

Höhe des Münzstapels:	P	30	42	Q	R	36	S	T
Wie oft als linkestes Feld gewählt:	a	b	c	d	e			

    Die drei rechtesten Felder können dabei nie als linkester von vier Münzstapeln gewählt worden sein.

    Die 42 Münzen am dritten Stapel ergeben sich aus $a + b + c$, während die 30 Münzen am Stapel links daneben sich nur aus $a + b$ ergeben. Also ist $c = 12$.

    Die 36 Münzen am sechsten Stapel ergeben sich aus $c + d + e$, während der gesuchte Stapel S rechts daneben nur $d + e$ Mal eine Münze erhalten hat. Er hat daher um c Münzen weniger erhalten, also nur $36 - 12 =$ **24**.